

Análisis de la consistencia dinámica de algunos modelos meteorológicos en coordenadas generalizadas

Marco A. Núñez

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, A. P. 55-534,
C.P. 09340, Distrito Federal, México. e-mail: manp@xanum.uam.mx

Resumen

Los modelos computacionales para flujos atmosféricos de mesoescala, se han convertido en una valiosa herramienta para el análisis meteorológico operacional y para estudios que requieren de la estimación de campos meteorológicos como los estudios de calidad del aire, análisis climatológicos, y el estudio del balance hídrico en cuencas. Sin embargo, tales modelos no están exentos de inconsistencias dinámicas. En este trabajo damos ejemplos explícitos de las inconsistencias en diferentes versiones del llamado modelo MM5. Los resultados muestran que ninguna de las versiones de dicho modelo, es dinámicamente consistente, por lo que los resultados obtenidos a la fecha con dicho modelo, deben revisarse con ecuaciones dinámicamente consistentes.

1. Introducción

Diversos trabajos se han dedicado al desarrollo y análisis de las ecuaciones de movimiento en coordenadas de interés meteorológico entre las que destacan las formulaciones que usan proyecciones conformes de la esfera terrestre en un plano [1]-[7]. Modelos conocidos por sus siglas en inglés como MM5, WRF, RAMS, usan proyecciones en las ecuaciones hidrodinámicas. Sin embargo, la imposibilidad de obtener en general soluciones exactas de tales ecuaciones, ha limitado el análisis de su consistencia dinámica. Esto ha motivado estudios [8]-[10] donde se muestra que las ecuaciones de movimiento de algunos modelos computacionales de mesoescala tienen inconsistencias o son válidas en una región pequeña. Entre los modelos estudiados y que presentan limitaciones en su rango de validez tenemos los modelos RAMS [11], HOTMAC [12] y ARPS[13]. Los objetivos del presente trabajo son: (i) Dar formulaciones dinámicamente consistentes de las ecuaciones de movimiento en coordenadas de proyección. (ii) Usar soluciones lagrangianas de las ecuaciones propuestas y aquellas usadas por el modelo MM5 en sus diferentes versiones [14]-[17], para analizar y cuantificar el efecto directo de las inconsistencias dinámicas en dicho modelo. Los resultados demuestran que las inconsistencias generar errores significativos que invalidan el uso de las diferentes versiones de MM5, para el análisis operacional y otros estudios.

2. Ecuaciones de movimiento en coordenadas de proyección

Una forma de considerar la curvatura terrestre en las ecuaciones de movimiento consiste en usar proyecciones. Dado que las proyecciones se definen a partir de las coordenadas geográficas comenzaremos con la definición de estas últimas. Consideremos un sistema de referencia primario Y^i con el plano Y^1Y^2 sobre el ecuador y cuyo eje Y^3 coincide con el eje de rotación terrestre. Las coordenadas esféricas están dadas por las ecuaciones de transformación

$$Y^1 = r \cos \phi \cos \lambda \quad Y^2 = r \cos \phi \sin \lambda \quad Y^3 = r \sin \phi , \quad (2.1)$$

Sustituyendo en el vector de posición de una partícula de fluido

$$\mathbf{R} = Y^i \widehat{\mathbf{Y}}_i = r \left[\cos \phi \left(\cos \lambda \widehat{\mathbf{Y}}_1 + \sin \lambda \widehat{\mathbf{Y}}_2 \right) + \sin \phi \widehat{\mathbf{Y}}_3 \right] \quad (2.2)$$

obtenemos los factores métricos $h_\lambda = r \cos \phi$, $h_\phi = r$, $h_r = 1$, y la relación siguiente entre los vectores tangentes unitarios $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\mathbf{r}}$, y los vectores base del sistema primario

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{Y}}^1 \\ \widehat{\mathbf{Y}}^2 \\ \widehat{\mathbf{Y}}^3 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Las proyecciones generan coordenadas curvilíneas ortogonales $x_p y_p z_p$ que llamaremos *coordenadas de proyección* y que definiremos como sigue. Denotemos el radio terrestre por $r = a$. La proyección de un punto en la esfera terrestre ($\lambda, \phi, r = a$) es un par de coordenadas cartesianas x_p, y_p dado por un par de ecuaciones

$$x_p = x_p(\lambda, \phi) \quad y_p = y_p(\lambda, \phi). \quad (2.4a)$$

Suponemos que el centro ($\lambda_c, \phi_c, r = a$) de la región de interés se proyecta en el origen del sistema $x_p y_p$,

$$x_p(\lambda_c, \phi_c) = y_p(\lambda_c, \phi_c) = 0. \quad (2.4b)$$

Si un punto en el espacio tiene coordenadas esféricas (λ, ϕ, r), sus *coordenadas de proyección* son la tríada (x_p, y_p, z_p) definidas por (2.4a) y la coordenada "vertical"

$$z_p = r - a. \quad (2.4c)$$

Dado que las proyecciones usadas en meteorología son conformes el sistema $x_p y_p z_p$ es curvilíneo ortogonal. Para obtener las ecuaciones en coordenadas x_p, y_p, z_p , usamos las expresiones en coordenadas esféricas $s^1 = \lambda$, $s^2 = \phi$, $s^3 = r$. Usando la notación $\hat{\mathbf{s}}^1 = \hat{\boldsymbol{\lambda}}$, $\hat{\mathbf{s}}^2 = \hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\mathbf{s}}^3 = \hat{\mathbf{r}}$, la relación (2.3) toma la forma

$$\hat{\mathbf{s}}^i = \mathbb{R}_{ij} \widehat{\mathbf{Y}}^j \quad (2.5)$$

Para simplificar las expresiones usaremos la notación $x_p^1 = x_p$, $x_p^2 = y_p$, $x_p^3 = z_p$. La ortogonalidad de las coordenadas x_p^i implica que los vectores unitarios

$$\hat{\mathbf{x}}_p^i = \frac{\mathbf{x}_p^i}{h_{pi}} \quad \text{con} \quad \mathbf{x}_p^i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_p^i}, \quad h_{pi} = \|\mathbf{x}_p^i\|. \quad (2.6)$$

forma una base ortonormal, por lo que podemos escribir

$$\hat{\mathbf{x}}_p^i = T_{ij} \hat{\mathbf{s}}^j \quad (2.7)$$

donde T_{ij} es una matriz de rotación. En los casos que nos interesan, T define una *rotación* de $\hat{\mathbf{s}}^1$ y $\hat{\mathbf{s}}^2$. Por lo que dicha matriz tiene la forma

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & 0 \\ -T_2 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Para comparar con la expresiones reportadas en la literatura usaremos la notación siguiente $\hat{\mathbf{x}}_p = \hat{\mathbf{x}}_p^1$, $\hat{\mathbf{y}}_p = \hat{\mathbf{x}}_p^2$, $\hat{\mathbf{z}}_p = \hat{\mathbf{x}}_p^3$, $h_x = h_{p1}$, $h_y = h_{p2}$. Usando (2.7), (2.8), obtenemos la relación entre componentes de la velocidad relativa a la tierra $\mathbf{v} = u_s \hat{\boldsymbol{\lambda}} + v_s \hat{\boldsymbol{\phi}} + w_s \hat{\mathbf{r}} = u_p \hat{\mathbf{x}}_p + v_p \hat{\mathbf{y}}_p + w_p \hat{\mathbf{z}}_p$, a saber,

$$u_s = u_p T_1 - v_p T_2, \quad v_s = u_p T_2 + v_p T_1, \quad w_s = w_p. \quad (2.10)$$

Con lo anterior es fácil ver que las ecuaciones de movimiento en coordenadas de proyección son

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{1}{h_x \rho} \frac{\partial p}{\partial x_p} &= v_p \left(f + \frac{u_s \tan \phi}{a} + \xi \right) - e w_p T_1 - \frac{u_p w_p}{a} \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{1}{h_y \rho} \frac{\partial p}{\partial y_p} &= -u_p \left(f + \frac{u_s \tan \phi}{a} + \xi \right) + e w_p T_2 - \frac{v_p w_p}{a} \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_p} + g &= e (u_p T_1 - v_p T_2) + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a} \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde usamos la notación $\xi = T_1 \dot{T}_2 - T_2 \dot{T}_1$, $\dot{T}_i = dT_i/dt$, $e = 2\Omega \cos \phi$, $f = 2\Omega \sin \phi$. Para detalles ver [8]-[10].

3. Incongruencias obvias entre versiones diferentes del modelo MM5

En esta sección veremos brevemente las ecuaciones de movimiento reportadas en versiones diferentes de modelo MM5. Los resultados de esta sección son los siguientes:

(i) *Documentaciones de versiones diferentes, reportan ecuaciones de movimiento diferentes.*

(ii) El sentido común nos dice que *al menos una de las versiones es incorrecta.*

(A) La documentación de MM2 versión 2, hace referencia al artículo [14] donde se reportan las ecuaciones siguientes para un flujo *bidimensional* un plano cartesiano xz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* u}{\partial t} &= -\frac{\partial p^* u u}{\partial x} - \frac{\partial p^* \sigma u}{\partial \sigma} - \frac{\sigma R_d T p^*}{p} \frac{\partial p^*}{\partial x} - p^* \frac{\partial \phi}{\partial x} + f p^* (v - v_g) \\ &\quad + p^* (F_u + D_u + P_u + C_u) \\ \frac{\partial p^* v}{\partial t} &= -\frac{\partial p^* u v}{\partial x} - \frac{\partial p^* \sigma v}{\partial \sigma} - f p^* (u - u_g) + p^* (F_v + D_v + P_v + C_v) \end{aligned} \quad (3.1)$$

con $A_u = p^* (F_u + D_u + P_u + C_u)$, $A_v = p^* (F_v + D_v + P_v + C_v)$, donde F , D , P , C , R son "horizontal eddy diffusion", "horizontal fourth order smoothing", "vertical eddy flux convergence", "cumulus transport term", and "radiative heating".

Las ecuaciones (3.1) sólo modelan flujos bidimensionales y son válidas en un intervalo horizontal no mayor a 200 km [8]-[10]. Extrañamente, tales ecuaciones se usaron en la referencia [25] para modelar sobre un intervalo horizontal de 600 km.

(B) Las ecuaciones reportadas en la documentación de MM5 versión 2 [15] son

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_p} &= v_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} \right) - e w_p - \frac{u_p w_p}{a} + D_u \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_p} &= -u_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} \right) - \frac{v_p w_p}{a} + D_v \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_p} + g &= e u_p + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a} + D_w \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde m es el "map-scale factor", $e = 2\Omega \cos \phi$, $f = 2\Omega \sin \phi$, ϕ es la latitud, $\alpha = \lambda - \lambda_c$, λ es la longitud y λ_c es la longitud central.

(C) Las ecuaciones reportadas en la documentación de MM5 versión 3 [16] son

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_p} &= v_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} - v_p \frac{\partial m}{\partial x_p} \right) - ew_p \cos \alpha - \frac{u_p w_p}{a} + D_u \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_p} &= -u_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} - v_p \frac{\partial m}{\partial x_p} \right) + ew_p \sin \alpha - \frac{v_p w_p}{a} + D_v \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_p} + g &= e(u_p \cos \alpha - v_p \sin \alpha) + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a} + D_w, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Las diferencias obvias entre las ecuaciones (3.2) y (3.3) nos dicen que *al menos un conjunto de ecuaciones es incorrecto*. Como veremos más adelante, *ninguno de los conjuntos de ecuaciones es correcto*.

4. Comparación entre las ecuaciones (2.11) y (3.3)

En esta sección compararemos las ecuaciones (3.3) de MM5 versión 3 con las ecuaciones (2.11), para las proyecciones de Lambert y Mercator.

4.1 La proyección de Lambert reportada en [17] es

$$x_p = R_s(\phi) \sin(k\alpha) \quad y_p = -R_s(\phi) \cos(k\alpha) \quad (4.1a)$$

con $R_s(\phi) = (am \cos \phi)/k$, $m = [\tan B / \tan B_1]^k \cos \phi_1 / \cos \phi$, $B = 2^{-1}(90^\circ - \phi)$, $B_1 = 2^{-1}(90^\circ - \phi_1)$,

$$k = \frac{\log [\cos \phi_1 / \cos \phi_2]}{\log [\tan (\pi/4 - \phi_1/2) / \tan (\pi/4 - \phi_2/2)]}. \quad (4.1b)$$

(A) Con algunas manipulaciones algebraicas las ecuaciones (2.11) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_p} &= v_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} - v_p \frac{\partial m}{\partial x_p} \right) - ew_p \cos k\alpha - \frac{u_p w_p}{a} \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_p} &= -u_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} - v_p \frac{\partial m}{\partial x_p} \right) - ew_p \sin k\alpha - \frac{v_p w_p}{a} \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_p} + g &= e(u_p \cos k\alpha + v_p \sin k\alpha) + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

(B) De acuerdo con (3.3) y haciendo $D_u = D_v = D_w = 0$, las ecuaciones de MM5 versión 3 son

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} &= v_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) - ew_p \cos \alpha - \frac{u_p w_p}{a} \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial y_p} &= -u_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) + ew_p \sin \alpha - \frac{v_p w_p}{a} \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} + g &= e(u_p \cos \alpha - v_p \sin \alpha) + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Las diferencias entre (4.2) y (4.3) son obvias. Los ejemplos numéricos demuestran que: Las ecuaciones (4.3) de MM3 son incorrectas. De hecho, no pueden reproducir los movimientos inerciales en ausencia de un campo de presión, los cuales son los movimientos más elementales de una partícula atmosférica.

4.2 La proyección de Mercator reportada en [17] es

$$x_p = a\alpha \quad y_p = a \ln [(1 + \sin \phi) / \cos \phi]. \quad (4.4)$$

(A) Las ecuaciones (2.11) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} &= v_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) - ew_p - \frac{u_p w_p}{r} \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial y_p} &= -u_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) - 0 - \frac{v_p w_p}{r} \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} + g &= eu_p + \frac{u_p^2 + v_p^2}{r}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

(B) De acuerdo con (3.3) y haciendo $D_u = D_v = D_w = 0$, las ecuaciones de MM5 versión 3 son

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} &= v_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) - ew_p \cos \alpha - \frac{u_p w_p}{a} \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial y_p} &= -u_p \left(f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) + ew_p \sin \alpha - \frac{v_p w_p}{a} \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} + g &= e(u_p \cos \alpha - v_p \sin \alpha) + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nuevamente, las ecuaciones (4.5) y (4.6) son diferentes.

Hay dos métodos para mostrar que las ecuaciones (4.2), (4.5), obtenidas de (2.11), son correctas:

- (i) Revisando cuidadosamente la deducción de las ecuaciones (2.11).
- (ii) Resolviendo las ecuaciones (4.2), (4.5), y comparando con los resultados obtenidos al resolver las ecuaciones en coordenadas esféricas. En efecto, las solución no puede depender de las coordenadas usadas!

En la sección siguiente compararemos las soluciones numéricas que dan las ecuaciones (4.2), (4.3), para la proyección de Lambert, con las soluciones de las ecuaciones en coordenadas esféricas. Los resultados muestran claramente que las ecuaciones (4.3) de MM5 no reproducen los resultados esperados, peor aún, las ecuaciones (4.5) de MM5 no conservan la energía ni momento angular (cuando dichas cantidades son constantes de movimiento) como resultado de sus inconsistencias. De estos resultados podemos decir que las ecuaciones (3.3) de MM5 versión 3 son dinámicamente inconsistentes y las ecuaciones (3.2) de MM5 versión 2 son más inconsistentes aún.

5. Ejemplos numéricos

En esta sección resolveremos las ecuaciones en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} - \frac{u_s v_s}{r} \tan \phi + \frac{u_s w_s}{r} - 2\Omega v_s \sin \phi + 2\Omega w_s \cos \phi &= -\frac{1}{r \cos \phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \\ \frac{dv_s}{dt} + u_s^2 \frac{\tan \phi}{r} + \frac{v_s w_s}{r} + 2\Omega u_s \sin \phi + \Omega^2 r \cos \phi \sin \phi &= -\frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ \frac{dw_s}{dt} - \frac{u_s^2 + v_s^2}{r} - 2\Omega u_s \cos \phi - \Omega^2 r \cos^2 \phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g \frac{R_e^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

junto con las ecuaciones correspondientes a las velocidades

$$\dot{\lambda} = \frac{u_s}{r \cos \phi}, \quad \dot{\phi} = \frac{v_s}{r}, \quad \dot{r} = w_s, \quad (5.2)$$

para un campo de presión dado $p(\lambda, \phi, r, t)$ y una densidad constante. En este caso las ecuaciones (5.1), (5.2), constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que se resuelve fácilmente con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. La precisión de la solución numérica se comprueba verificando que:

- (i) La energía se conserve cuando p no depende explícitamente del tiempo.
- (ii) El momento angular se conserve cuando p sólo depende de ϕ .
- (iii) La solución numérica no cambie al reducir el paso de integración.

Tomaremos la solución de (5.1), (5.2), como la solución verdadera ya que: *La solución de las ecuaciones de movimiento dadas por la Segunda Ley de Newton, está unívocamente determinada por las condiciones iniciales de cada partícula de fluido y no depende del sistema de coordenadas.*

Las ecuaciones en coordenadas de proyección (2.11), (3.3), se completan con las ecuaciones de las velocidades generalizadas

$$\dot{x}_p = \frac{u_p}{h_x}, \quad \dot{y}_p = \frac{v_p}{h_y}, \quad \dot{z}_p = w_p \quad (5.3)$$

con las cuales obtenemos un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales de primer orden, cuya solución está unívocamente determinada por las condiciones iniciales de una partícula de fluido.

Los ejemplos que daremos se obtienen resolviendo los conjuntos de ecuaciones siguientes

- (A) Ecuaciones en coordenadas esféricas (5.1), (5.2).
- (B) Ecuaciones para la proyección de Lambert (4.2), (5.3).
- (C) Ecuaciones para la proyección de Lambert del modelo MM5 (4.3), (5.3).

La proyección de Lambert se calcula con la latitudes de referencia: $\phi_1 = 10^0$, $\phi_2 = 40^0$.

En cada uno de los ejemplos usaremos las condiciones iniciales:

$$\lambda(0) = 0, \quad u_s(0) = v_s(0) = 20 \text{ ms}^{-1}, \quad z_s(0) = 100 \text{ m}.$$

Lo único que variaremos es la latitud inicial y el gradiente de presión.

Las ecuaciones se integran con el paso de tiempo $\Delta t = 3.6 \text{ s}$.

Considerando una velocidad promedio $\langle v_s(0) \rangle = 20 \text{ ms}^{-1}$, el paso de tiempo equivale a un paso promedio de 76 m en la dirección de un meridiano. Esta resolución espacial es verdaderamente pequeña, en la actualidad ningún modelo de mesoescala resuelve las ecuaciones hidrodinámicas con esta resolución espacial. Por lo que es de esperarse que las diferencias entre los resultados de las ecuaciones en coordenadas esféricas y las de MM5 versión 3, sean aun mayores con las mallas usadas en el modelo.

Ejemplo 1. Figuras 1-3 dan resultados con $\phi(0) = 45^0$, $\nabla p = 0$.

Observamos lo siguiente:

- (i) Las graficas dadas por las ecuaciones (5.1), (5.3), no se distinguen de las gráficas dadas por las ecuaciones (4.2), (5.3), por lo que estas últimas se omiten.

(ii) Las diferencias observadas en las Figuras 1, 2, 3, son claras. Aunque las diferencias en las graficas de ϕ y λ , son "pequeñas", la Figura 3 con la proyección de la trayectoria en el plano $\lambda\phi$ indica que tales diferencias son importantes. En efecto, basta con multiplicar por $111 \text{ km}/1^\circ$, para obtener las diferencias en una escala de km.

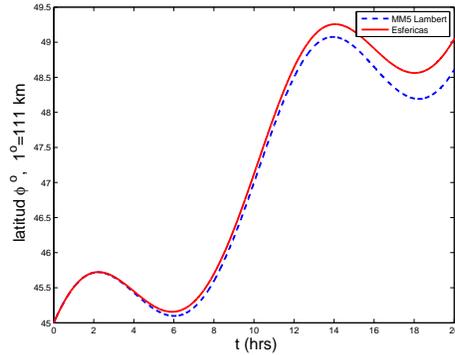


Figure 1: Variación temporal de la latitud ϕ para Ejemplo 1.

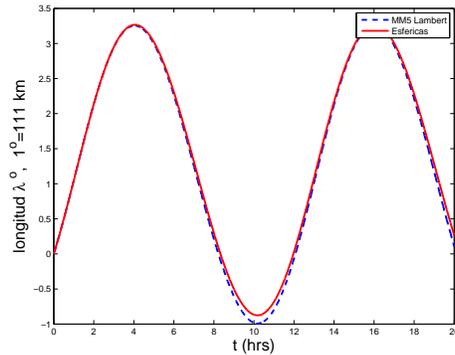


Figure 2: Variación temporal de la longitud λ para Ejemplo 1.

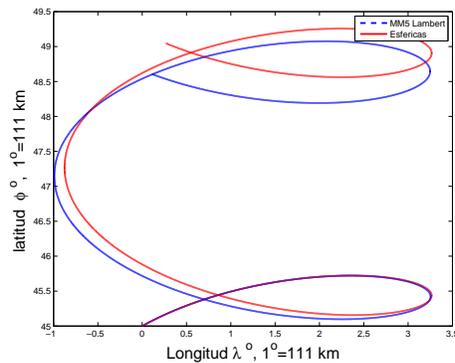


Figure 3: Proyección en el plano $\lambda\phi$ de la trayectoria de un partícula de fluido para Ejemplo 1.

Ejemplo 2. Figuras 4–7 dan resultados para $\phi(0) = 45^\circ$, $p = p_0 + \mu p_c p_1$, con $p_0 = -g\rho(z_s - H)$, $p_c = 10^5 \text{ Nm}^{-2}$, $H = 10 \text{ km}$, $\mu = 10^{-3}$, $p_1 = -\mu[x_s \cos(\theta) + y_s \sin(\theta)] + \sin(x_s) \sin(y_s)$, $\theta = 45^\circ$, $x_s = \omega\lambda$, $y_s = \omega\phi$, $\omega = 3.247124$.

Observaciones:

(i) Las gráficas dadas por las ecuaciones (5.1), (5.3), no se distinguen de las gráficas dadas por las

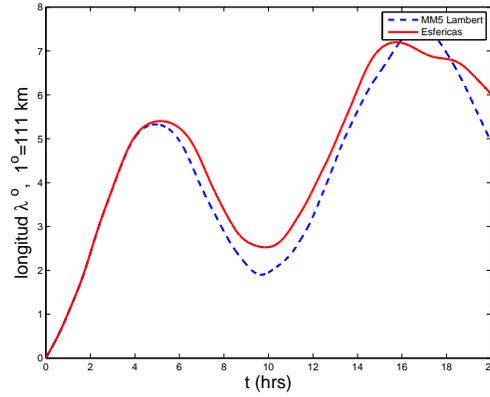


Figure 4: Variación temporal de la longitud λ para el Ejemplo 2.

ecuaciones (4.2), (5.3), por lo que estas últimas se omiten.

(ii) Las Figuras 4, 5, 6, muestran diferencias claras en $t \sim 4h$. A partir de este instante, las diferencias crecen significativamente. Esto se refleja en la proyección de la trayectoria en el plano $\lambda\phi$, dada en la Figura 7. Si multiplicamos por $111 \text{ km}/1^\circ$ la escala de la Figura 7, es claro que los resultados dados por MM5 carecen de sentido.

6. Conclusiones

(i) Hemos reportado ecuaciones de movimiento (2.11) cuya solución coincide con la dada por (5.1), (5.3), por lo que son dinámicamente consistentes.

(ii) Versiones diferentes del modelo MM5, usan ecuaciones diferentes. Aunque las ecuaciones de MM5 versión 3 son las más parecidas a las ecuaciones (2.11), dichas ecuaciones no pueden reproducir la solución dada por las ecuaciones en coordenadas esféricas en los casos más elementales, por lo que podemos suponer que la versión 2 [Ecs. (3.2)] dará peores resultados.

(iii) Queda a la comunidad elaborar sus conclusiones sobre el uso que se ha hecho de un modelo cuya formulación teórica no puede reproducir los movimientos (inerciales) más elementales de una partícula atmosférica.

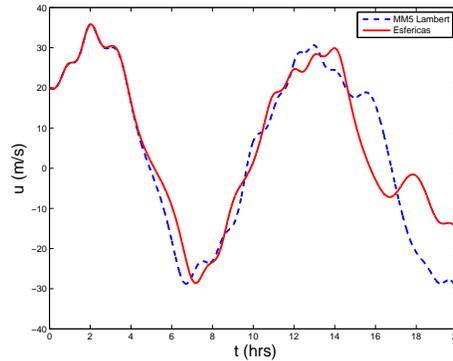


Figure 5: Variación temporal de la componente u_s de la velocidad para el Ejemplo 2.

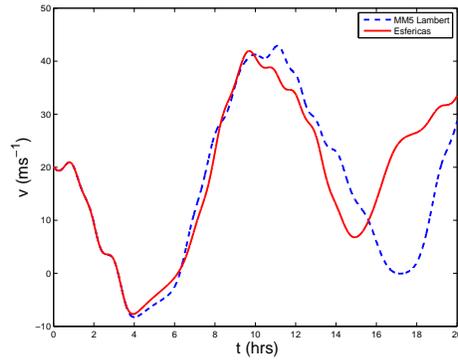


Figure 6: Variación temporal de v_s Ejemplo 2.

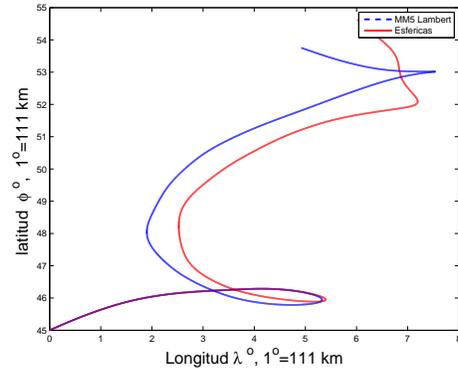


Figure 7: Proyección en el plano $\lambda\phi$ de la trayectoria de un partícula de fluido para el Ejemplo 2.

Referencias

1. G. J Haltiner, *Numerical Weather Prediction* (Wiley and Sons, New York, 1971). G. J Haltiner G. J, R. T. Williams , *Numerical Weather Prediction and Dynamic Meteorology* (Wiley and Sons, New York, 1980), 2nd ed.
2. Kasahara, A., 1974: Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. *Mon. Wea. Rev.*, 102, 509–522. Kasahara, A. and W. M. Washington, 1967: NCAR global general circulation model of the atmosphere. *Mon. Wea. Rev.*, 95, 389–401.
3. Laprise, R., 1992: The Euler equations of motion with hydrostatic pressure as an independent variable. *Mon. Wea. Rev.*, 120, 197– 207.
4. Juang, H.-M. H., 1992: A spectral fully compressible nonhydrostatic mesoscale model in hydrostatic sigma coordinates: Formulation and preliminary results. *Meteor. Atmos. Phys.*, 50, 75–88.
5. Dutton, J. A., 1976: *The Ceaseless Wind: An Introduction to the Theory of Atmospheric Motion*. McGraw-Hill, 579 pp.
6. Gal-Chen, T., and R. C. J. Somerville, 1975: On the use of coordinate transformations for the solution of the Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 17, 209–228.
7. Arakawa, A., C. R. Mechoso, and C. S. Konor, 1992: An isentropic vertical coordinate model: Design and application to atmospheric frontogenesis studies. *Meteor. Atmos. Phys.*, 50, 31–45.
8. M.A. Núñez, *Il Nuovo Cimento C* 25, pp. 13-34 (2002).
9. M.A. Núñez, *Il Nuovo Cimento C* 26, 469-491 (2003).
10. M.A. Núñez, *Revista Mexicana de Física* 51 (3), 217-229 (2005).

11. R. A. Pielke, *Mesoscale Meteorological Modeling* (Academic Press, New York, 1984); 2nd ed. 2002. R. A. Pielke, and J. Cram, *Meteorol. Atmos. Phys.* **40** (1989) 189-193. R. A. Pielke, et. al., *Meteorol. Atmos. Phys.* **49** (1992) 69-91. *RAMS The Regional Atmospheric Modeling System Technical Description DRAFT*, <http://www.atmet.com/html/docs/rams.techman.pdf>.
12. G. L. Mellor and T. Yamada, *J. Atmos. Sci.* **31** (1974) 1791-1806. T. Yamada, *J. Met. Soc. Japan* **59** (1981) 108-122. T. Yamada and S. Bunker, *J. Appl. Meteor.* **27** (1988) 562-578. T. Yamada, J. C.-Y. Kao and S. Bunker, *Atmos. Environ.* **23** (1989) 539-554. J. M. Brown and M. Williams, *HOTMAC Input Guide*, chap. 2. Internal Report, LA-UR-98-1365, Los Alamos National Laboratory, 1998. <http://www-tsa.lanl.gov/tsa4/pdf/air/hotmac.input.pdf>.
13. M. Xue, Droegemeler K. K., Wong V., Shapiro A. and Brewster K., *Advanced Regional Prediction System (ARPS) Version 4.0 User's Guide*, 1995. <http://wwwcaps.ou.edu/ARPS/>, 1994.
14. J. Dudhia, *J. Atmos. Sci.* **46** (1989) 3077-3107.
15. J. Dudhia, Gill D., Guo Y.-R., Hansen D., Manning K. and Wang W., *PSU/NCAR Mesoscale Modeling System Tutorial Class Notes and Users' Guide (MM5 Modeling System Version 2)*, (1999). <http://www.mmm.ucar.edu/mm5/mm5-home.html>.
16. J. Dudhia, Gill D., Guo Y.-R., Hansen D., Manning K. and Wang W., *PSU/NCAR Mesoscale Modeling System Tutorial Class Notes and Users' Guide: MM5 Modeling System Version 3*, (January, 2003).
17. Y.-R. Guo and S. Chen, *Terrain and Land Use for the Fifth-Generation Penn State/NCAR Mesoscale Modeling System (MM5): Program Terrain*, NCAR Technical Note, NCAR/TN-397+IA.